

УДК 629.7.05

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СРЕЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ СИГНАЛА ПО ЕГО ИЗМЕРЕНИЯМ

**Н. В. Григорьев**

*Летно-исследовательский институт им. М. М. Громова, Жуковский, Россия*

**Аннотация.** Типовой процедурой обработки данных летных испытаний является сглаживание измерений в целях получения оценки измеренного в полете истинного сигнала. Если обработка данных проводится в частотной области, то возникает необходимость оценки частотного образа (Фурье-образа) истинного сигнала по его измерениям. Предлагается метод построения простейшей оценки Фурье-образа сигнала в виде низкочастотной части Фурье-образа измерений. Такая оценка определяется единственным параметром – частотой среза. Показатель качества оценки – средний квадрат ее отклонения от Фурье-образа истинного сигнала. Задача построения оценки Фурье-образа сигнала рассматривается как задача нахождения оптимальной частоты среза, для которой критерий минимален. Построена аппроксимация зависимости критерия от частоты среза в виде функции только измерений. Оценка оптимальной частоты среза находится в результате минимизации аппроксимационной зависимости. Предлагаемый метод оценки оптимальной частоты среза не содержит настраиваемых параметров. В приложении к задачам идентификации аэродинамических характеристик самолета показано, что оценки частот среза, полученные предлагаемым методом, обеспечивают точность идентификации, сопоставимую с точностью идентификации при оптимальных частотах среза.

**Ключевые слова:** сглаживание, линейная оценка, дискретное преобразование Фурье, метод наименьших квадратов, оптимизация, идентификация

**Для цитирования:** Григорьев Н. В. Метод определения оптимальной частоты среза для оценки сигнала по его измерениям // Аэрокосмическая техника и технологии. 2024. Т. 2, № 3. С. 98–112. DOI 10.52467/2949-401X-2024-2-3-98-112. EDN PKDYZF

## METHOD OF THE OPTIMAL CUTOFF FREQUENCY DETERMINATION FOR SIGNAL ESTIMATION BY ITS MEASUREMENTS

**N. V. Grigoriev**

*Gromov Flight Research Institute, Zhukovsky, Russia*

**Abstract.** A typical procedure for flight test data processing is the measurements smoothing to obtain the estimate of the true signal measured in flight. If the data processing is carried out in the frequency domain, it becomes necessary to estimate the frequency transform (Fourier transform) of the true signal by its measurements. A method is proposed for constructing the simplest estimate of the signal Fourier transform in the form of the low-frequency part of the Fourier transform measurements. Such estimate is determined by the single parameter – the cutoff frequency. The indicator for the estimate quality is the mean square of its deviation from the Fourier transform of the true signal. The task of constructing the estimate of the signal Fourier transform is considered as the task of finding the optimal cutoff frequency for which the criterion is

© Григорьев Н. В., 2024

minimal. An approximation of the criterion dependence on the cutoff frequency is constructed as the function of measurements only. The estimate of the optimal cutoff frequency is found by minimizing the approximation dependence. The proposed method for estimating the optimal cutoff frequency does not contain adjustable parameters. In the application to the tasks of identifying aircraft aerodynamic characteristics, it is shown that estimates of cutoff frequencies obtained by the proposed method provide identification accuracy comparable to the identification accuracy at optimal cutoff frequencies.

**Keywords:** smoothing, linear estimation, discrete Fourier transform, least squares method, optimization, identification

**For citation:** Grigoriev N. V. Method of the optimal cutoff frequency determination for signal estimation by its measurements. *Aerospace Engineering and Technology*. 2024. Vol. 2, no. 3, pp. 98–112. DOI 10.52467/2949-401X-2024-2-3-98-112. EDN PKDYZF (In Russian)

## Введение

Задача оценки измеряемого сигнала по результатам его измерений имеет чрезвычайно широкий спектр приложений в экспериментальных научных и технических исследованиях. Рассматривается наиболее типичная постановка такой задачи, в которой требуется оценить низкочастотный сигнал на фоне широкополосного шума дискретных измерений. Для простоты назовем это задачей сглаживания измерений. Важность возможно наиболее точного решения этой задачи заключается в том, что ее результаты часто служат исходными данными для более общей обратной задачи по оценке параметров исследуемого процесса. Если обратная задача плохо обусловлена, то относительно небольшая погрешность исходных – сглаженных данных – может приводить к значительным погрешностям решения.

Несмотря на востребованность и давнюю историю задачи сглаживания в практике обработки летных испытаний, арсенал средств для ее решения во временной области довольно скуден: цифровые фильтры нижних частот, цифровое сглаживание полиномами на скользящем интервале, сглаживание усеченным рядом Фурье, сглаживание сплайном [1–5]. Все эти методы предполагают задание некоторых параметров: частоты среза, ширины переходной области фильтра, степени полинома, длины скользящего интервала, параметра регуляризации сплайна, количества членов усеченного ряда Фурье, выбор которых происходит, как правило, субъективно – «на глаз». Исключение составляют самооптимизирующиеся методы [5–7]. Однако результаты наших статистических численных экспериментов показывают, что эти методы, даже при оптимальном определении их параметров, уступают в точности сглаживанию усеченным рядом Фурье, если число членов усеченного ряда также определить оптимально.

Сама постановка задачи оценки низкочастотного сигнала по его измерениям стимулирует поиск решения в частотной области. Критерием качества оценки в частотной области служит интеграл от квадрата модуля разности Фурье-обра-

зов истинного сигнала и оценки. Оптимальная оценка представляет собой произведение фильтра Винера на Фурье-образ измеренного сигнала [1, 8]. Расчет фильтра Винера предполагает знание спектров истинного сигнала и спектра шума (погрешностей) измерений [1, 8–11], в то время как известен только спектр измеренного сигнала. Поэтому в приложениях используются различные приближения фильтра Винера на основе аппроксимаций спектров полезного сигнала и шума [9, 10], моделей полезного сигнала, предположений о ковариационных функциях [11], различных уточнений оценки фильтра Винера [12]. Разнообразие подходов показывает, что решение задачи далеко от завершения.

На практике задачу оценки Фурье-образа истинного сигнала нередко решают упрощенно [1, 2, 13, 14], обнуляя частотный образ измеренного сигнала выше некоторой частоты, которую далее, несколько нарушая общепринятое определение, будем называть частотой среза. Обоснованием такого упрощенного подхода является тот факт, что динамика летательного аппарата проявляется в ограниченном диапазоне частот, как правило, до 2 Гц, а шум измерений является широкополосным случайным процессом [1]. Однако выбрать частоту среза не просто, поскольку решение нужно принимать на основе оценки спектра измеренного сигнала, которая носит случайный характер. Предложены различные способы реализации такого выбора, но все они носят неформальный характер. Частоту среза рекомендуется выбирать как максимальную частоту, на которой низкочастотная часть оценки спектра (приблизительно соответствующая сумме спектров полезного сигнала и шума) становится равной оценке среднего значения спектра высокочастотной части (соответствующей спектру только шума). Учитывая, что отдельные значения оценки спектра шума могут отличаться от среднего в несколько раз, а понятие «низкочастотная часть оценки спектра» не формализовано (в ее выделении и заключается задача), применение этого правила может приводить к сколь угодно большой ошибке оценки частоты среза.

В [1, 8] предлагается находить частоту среза на основе субъективно выбираемых моделей низкочастотной и высокочастотной части спектра. Известен способ определения частоты среза посредством анализа зависимости энергии измеренного сигнала от частоты. Частота среза определяется как минимальная частота, начиная с которой зависимость энергии носит приблизительно линейный характер вплоть до частоты Найквиста.

Реализация этих способов приводит к тому, что вопрос о выборе частоты среза решается в той или иной мере субъективно.

Далее предлагается метод объективной оценки частоты среза, который не имеет настраиваемых параметров. Оценка частоты среза получается в виде функции только измерений.

### **Метод оценки оптимальной частоты среза**

Пусть  $z_i, i = \overline{0, N}$  – измерения сигнала  $s_i = s(t_i)$  в последовательные моменты времени  $t_i = \Delta_t i$ ,  $\Delta_t$  – период между измерениями. Модель измерений примем в виде:

$$z_i = s_i + v_i, \quad i = \overline{0, N}. \quad (1)$$

Предполагается, что погрешность измерений  $v_i$  представляет собой широкополосный случайный процесс типа белого шума. Компоненты погрешности измерений не коррелированы между собой, их математические ожидания равны нулю, а дисперсии постоянны, но могут быть неизвестны.

Зафиксируем любую частоту  $\omega_k$  из фундаментального набора частот:

$$\omega_k = 2\pi f_k = \frac{2\pi k}{T}, \quad k = \overline{0, M}, f_M \cong f_N, f_M < f_N, \quad (2)$$

где  $T = \Delta_t N$ ,  $f_N = 1/2\Delta_t$  – частота Найквиста.

Для данной частоты  $\omega_k$  дискретное преобразование Фурье (ДПФ) измерений можно рассматривать как «измерение»  $\tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega_k)$  ДПФ истинного сигнала, равное сумме ДПФ истинного сигнала и ДПФ погрешности измерений:

$$\tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega_k) = \Delta_t \sum_{i=0}^{N-1} z_i e^{-j\omega_k t_i} = \Delta_t \sum_{i=0}^{N-1} s_i e^{-j\omega_k t_i} + \Delta_t \sum_{i=0}^{N-1} v_i e^{-j\omega_k t_i}, \quad (3)$$

или

$$\tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega_k) = \tilde{s}(\omega_k) + \tilde{v}(\omega_k), \quad (4)$$

где  $\tilde{s}(\omega_k)$  – ДПФ истинного сигнала;  $\tilde{v}(\omega_k)$  – погрешность «измерения»  $\tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega_k)$ .

Если некоррелированные случайные величины  $v_i$  имеют первые моменты, равные  $E(v_i) = 0$ ,  $E(v_i^2) = \sigma^2$ , то математическое ожидание и дисперсия комплексной случайной величины  $\tilde{v}_k = \tilde{v}(\omega_k)$  равны  $E(\tilde{v}(\omega_k)) = 0$ ,  $\sigma_{\tilde{v}}^2 = E(\tilde{v}(\omega_k)\tilde{v}^*(\omega_k)) = N\Delta_t^2\sigma^2$ , где символ \* означает комплексное сопряжение.

Оценка  $\hat{\tilde{s}}(\omega_k)$  значения  $\tilde{s}(\omega_k)$  при частоте среза  $f_{\text{среза}} = f_{M_c}$ , где  $f_{M_c}$  – частота с номером  $M_c$  из фундаментального ряда частот, равна:

$$\hat{\tilde{s}}(\omega_k, f_{\text{среза}}) = \hat{\tilde{s}}(\omega_k, f_{M_c}) = \begin{cases} \tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega_k), & \text{если } \omega_k \leq 2\pi f_{M_c}, \\ 0, & \text{если } \omega_k > 2\pi f_{M_c}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, оценка  $\hat{\tilde{s}}(\omega_k, f_{\text{среза}})$  – линейная оценка, т. е. оценка, линейно зависящая от измерений:

$$\hat{\tilde{s}}(\omega_k, f_{\text{среза}}) = \mathbf{L}_k(f_{\text{среза}})\mathbf{z}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{L}_k(f_{\text{среза}})$  – вектор-строка размерности  $N$  с комплексными элементами:

$$[\mathbf{L}_k(f_{\text{среза}})]_i = [\mathbf{L}_k(f_{M_c})]_i = \begin{cases} e^{-j\omega_k t_i}, & \text{если } \omega_k \leq 2\pi f_{M_c}, \\ 0, & \text{если } \omega_k > 2\pi f_{M_c}, \end{cases} \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (7)$$

$\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_N)^T$ . Поставим задачу: найти оценку значения  $f_{\text{среза}}$  в виде функции только измерений, доставляющую минимум функционалу:

$$J(f_{\text{среза}}) = \sum_{k=0}^M |\tilde{s}_k - \hat{\tilde{s}}(\omega_k, f_{\text{среза}})|^2. \quad (8)$$

Важно отметить, что в (8) отклонения оценки рассматриваются от ДПФ истинного сигнала, а не от ДПФ измерений. Заметим также, что истинное значение  $f_{\text{среза}}$  в виде функции только измерений определить невозможно в силу недетерминированности измерений.

В области действительных чисел общая задача нахождения оптимального параметра линейной оценки решена в [7]. Та же схема доказательства позволяет получить оценку  $f_{\text{среза}}$  и в задаче (8). Для любого значения  $f_{\text{среза}}$  сумма квадратов модулей остатков:

$$S(f_{\text{среза}}) = \sum_{k=0}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})|^2 \quad (9)$$

на интервале обработки может быть представлена в следующем виде:

$$S(f_{\text{среза}}) = \sum_{k=0}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k + \tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})|^2 = \sum_{k=0}^M \left\{ |\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k|^2 + (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k) (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}}))^* + (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})) (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k)^* + |\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})|^2 \right\}.$$

Следовательно, для функционала (8) справедливо представление:

$$J(f_{\text{среза}}) = \sum_{k=0}^M |\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})|^2 = S(f_{\text{среза}}) - \sum_{k=0}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k|^2 - \sum_{k=0}^M (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k) (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}}))^* - \sum_{k=0}^M (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})) (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k)^*.$$

Первое слагаемое при заданном значении  $f_{\text{среза}}$  может быть вычислено. Второе слагаемое не зависит от  $f_{\text{среза}}$  и, следовательно, не влияет на положение минимума целевого критерия. Его математическое ожидание очевидно равно  $(M + 1)\sigma_{\tilde{v}}^2$ . Вычислим математическое ожидание  $k$ -го составляющего третьего слагаемого:

$$\begin{aligned} E \left[ (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k) (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}}))^* \right] &= E \left[ \tilde{v}_k (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}}))^* \right] = \\ &= -E \left[ \tilde{v}_k \hat{s}^*(\omega_k, f_{\text{среза}}) \right] = \\ &= \begin{cases} -E[\tilde{v}_k \tilde{v}_k^*], & \text{если } \omega_k \leq 2\pi f_{\text{среза}} \\ 0, & \text{если } \omega_k > 2\pi f_{\text{среза}} \end{cases} = \begin{cases} -\sigma_{\tilde{v}}^2, & \text{если } \omega_k \leq 2\pi f_{\text{среза}} \\ 0, & \text{если } \omega_k > 2\pi f_{\text{среза}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$E \left[ (\tilde{s}_k - \hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})) (\tilde{s}^{\text{изм}}_k - \tilde{s}_k)^* \right] = \begin{cases} -\sigma_{\tilde{v}}^2, & \text{если } \omega_k \leq 2\pi f_{\text{среза}} \\ 0, & \text{если } \omega_k > 2\pi f_{\text{среза}} \end{cases}.$$

Таким образом, для целевого функционала справедлива следующая аппроксимация «в среднем»:

$$J(f_{\text{среза}}) \simeq J_a(f_{\text{среза}}) = S(f_{\text{среза}}) - (M + 1)\sigma_{\tilde{v}}^2 + 2\sigma_{\tilde{v}}^2(M - (M_c + 1)) =$$

$$= \sum_{k=M_c+1}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k|^2 - (M+1)\sigma_{\tilde{v}}^2 + 2\sigma_{\tilde{v}}^2(M - (M_c + 1)). \quad (10)$$

Оптимальное значение  $f_{\text{среза}}$  предлагается находить из условия минимума зависимости  $J_a(f_{\text{среза}})$ , аппроксимирующей зависимость  $J(f_{\text{среза}})$  погрешности оценки  $\hat{s}(\omega_k, f_{\text{среза}})$ .

Как уже отмечалось,  $\sigma_{\tilde{v}}^2 = N\Delta_t^2\sigma^2$ . Если дисперсия помех измерений неизвестна, то в аппроксимации (10) можно использовать оценку  $\hat{\sigma}_{\tilde{v}}^2$  дисперсии  $\sigma_{\tilde{v}}^2$ , вычисленную например, следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{\tilde{v}}^2 = \sum_{k=M_0}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k|^2, \quad (11)$$

где индекс  $M_0$  определяется из условия, что на интервале  $[f_{M_0}, f_N]$  спектр измеренного сигнала определяется шумом измерений. В дальнейших расчетах принято  $M_0 = M/2$ , т. е. значение  $M_0$  соответствует половине частоты Найквиста, а оценка  $f_{\text{среза}}$  находится из условия минимума зависимости:

$$\hat{J}_a(f_{\text{среза}}) = \sum_{k=M_c+1}^M |\tilde{s}^{\text{изм}}_k|^2 - (M+1)\hat{\sigma}_{\tilde{v}}^2 + 2\hat{\sigma}_{\tilde{v}}^2(M - (M_c + 1)). \quad (12)$$

Минимум зависимости (12) находится численно, простым перебором частот из фундаментального ряда (2) и вычисления для каждой частоты значения  $\hat{J}_a$ .

### Статистическая оценка погрешности метода

Оценим точностные свойства предложенного метода на примере выбора частот среза для измерений сигналов, показанных на рис. 1 и 2. Сигналы угловой скорости  $w_z(t)$  и угла атаки  $\Delta\alpha(t)$  получены с использованием одной и той же модели короткопериодического продольного движения самолета Buffalo C-8 [15]:

$$\begin{cases} \dot{w}_z = \bar{M}_z^{\omega_z} w_z + \bar{M}_z^{\alpha} \Delta\alpha + \bar{M}_z^{\delta_B} \Delta\delta_B, \\ \Delta\dot{\alpha} = w_z - 0,737\Delta\alpha + 0,005\Delta\delta_B, \end{cases} \quad w_z(0)=0, \Delta\alpha(0)=0 \quad (13)$$

для двух законов управления  $\Delta\delta_B(t)$ . Первый закон управления задавался в виде суммы двух синусоид с частотами 0,1 и 1 Гц, амплитудами 1 и 0,5° соответственно. Второй закон управления представлял собой перекладки руля высоты с одинаковой амплитудой 1,5°, разной продолжительности. Размах входных сигналов одинаковый – 3°. Значения коэффициентов  $\bar{M}_z^{\omega_z}$ ,  $\bar{M}_z^{\alpha}$ ,  $\bar{M}_z^{\delta_B}$  в модели (13) равны –1,588, –0,562, –1,66 соответственно. Размерность  $w_z$  – градус за секунду,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta_B$  – градус.

При синусоидальном законе управления все измеряемые переменные имеют непрерывные производные любого порядка и ограниченный по частоте спектр, причем спектр входного сигнала очевиден. При законе управления типа «перекладки» входной сигнал имеет разрывы, спектр входного сигнала неограничен, а угловая скорость имеет разрывы первой производной.

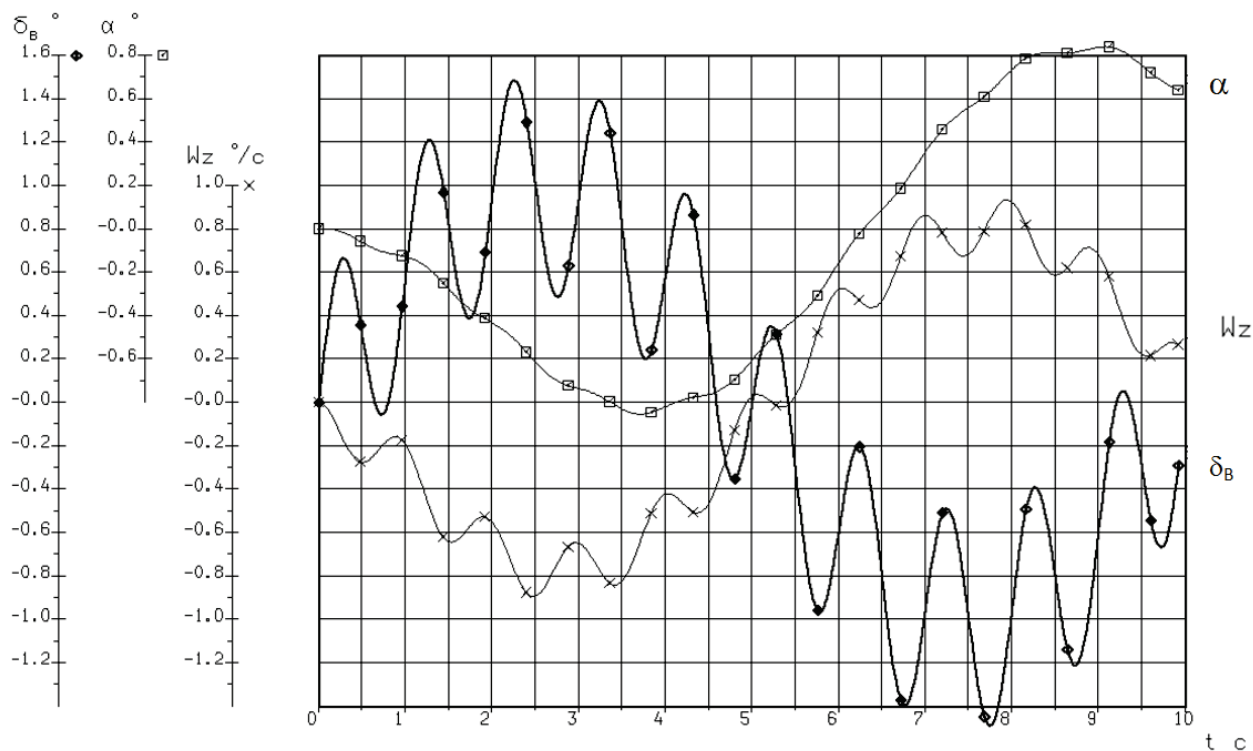


Рис. 1. Истинные сигналы (первый закон управления)

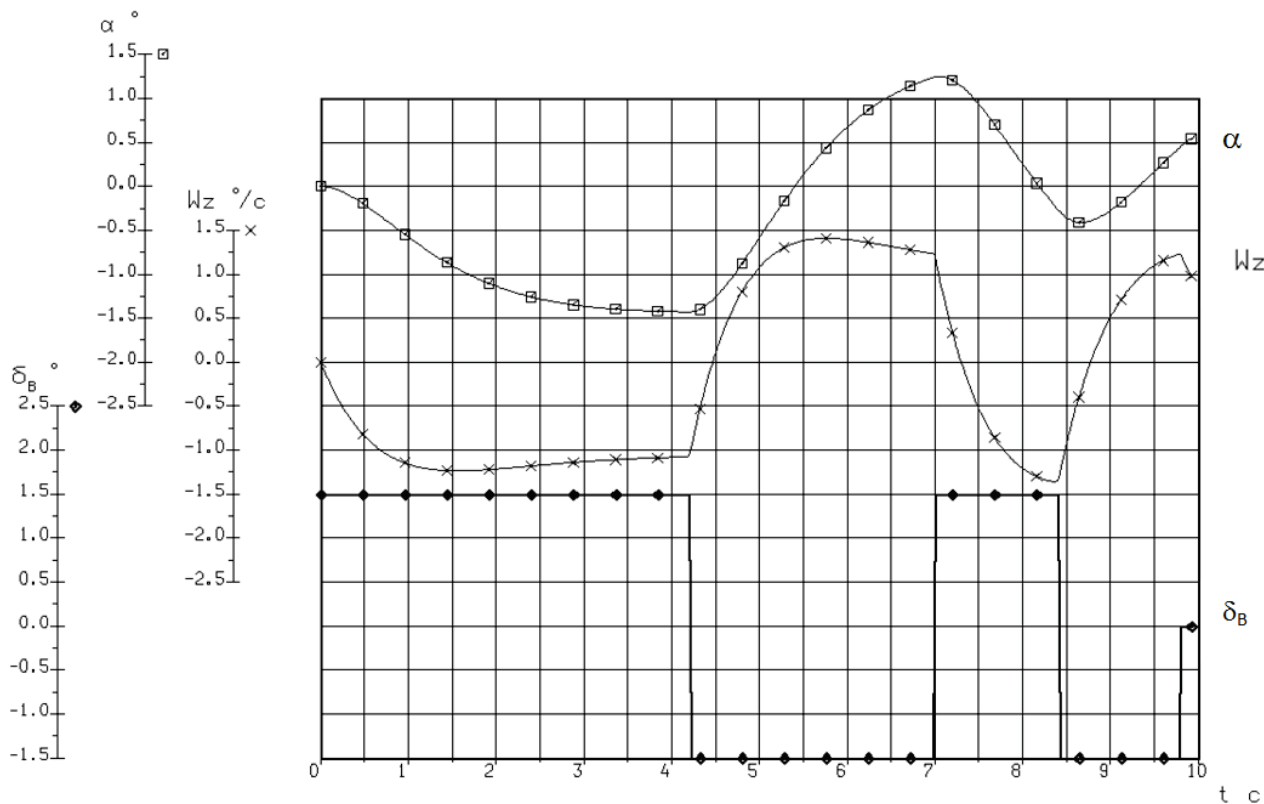


Рис. 2. Истинные сигналы (второй закон управления)

Частота измерений переменных  $w_z, \Delta\alpha, \Delta\delta_B$  принималась равной 50 Гц ( $\Delta_t = 0,02, N = 497$ ). Аддитивные погрешности измерений (1) моделировались независимыми гауссовскими случайными величинами с математическими ожиданиями, равными нулю, и среднеквадратическими отклонениями, равными:  $\sigma_\alpha = 1, \sigma_{\delta_B} = 0,3, \sigma_{w_z} = 0,07$  °/с соответственно. Таким образом моделировались сильно, средне и мало зашумленные измерения.

Покажем как «работает» предложенный способ определения  $f_{\text{среза}}$ . На рис. 3 представлены зависимости (12) и (8) аппроксимационного функционала  $J_a = J_a(f_{\text{среза}})$  (жирная линия) и исходного функционала  $J = J(f_{\text{среза}})$  (тонкая линия без маркеров) для измерений первого входного сигнала (суммы синусов). Там же приведена зависимость (тонкая линия с маркерами) от частоты интеграла от спектра измерений данного входного сигнала, т. е. интеграла от энергии сигнала:

$$\text{Int}S = \text{Int}S(f) = \int_0^f \tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega)(\tilde{s}^{\text{ИЗМ}}(\omega))^* d\omega.$$

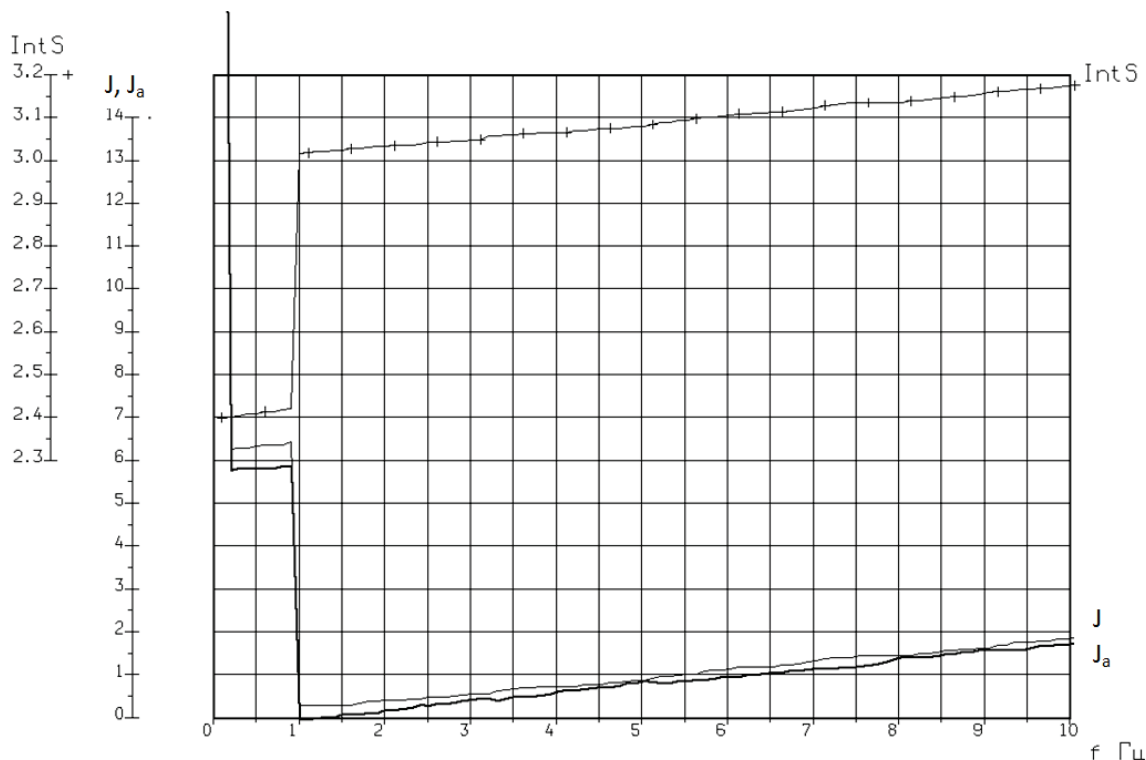


Рис. 3. Зависимости функционала (8)  $J = J(f_{\text{среза}})$  (тонкая линия без маркеров), его аппроксимации (12)  $J_a = J_a(f_{\text{среза}})$  (жирная линия) и интеграла от модуля ДПФ первого входного сигнала (маркированная линия) при наличии шумов измерений

В данном случае ограниченного по спектру сигнала не представляет труда определить частоту среза как «на глаз» по зависимости  $\text{Int}S(f)$ , так и по зависимости  $J_a(f_{\text{среза}})$ . Оптимальное (по зависимости  $J = J(f_{\text{среза}})$ ) значение  $f_{\text{среза}} = 1,2$  Гц, оценка оптимального значения по зависимости  $J_a(f_{\text{среза}})$  равна  $\hat{f}_{\text{среза}} = 1,2$  Гц.



На рис. 4 приведены аналогичные зависимости для второго входного сигнала «перекладки».

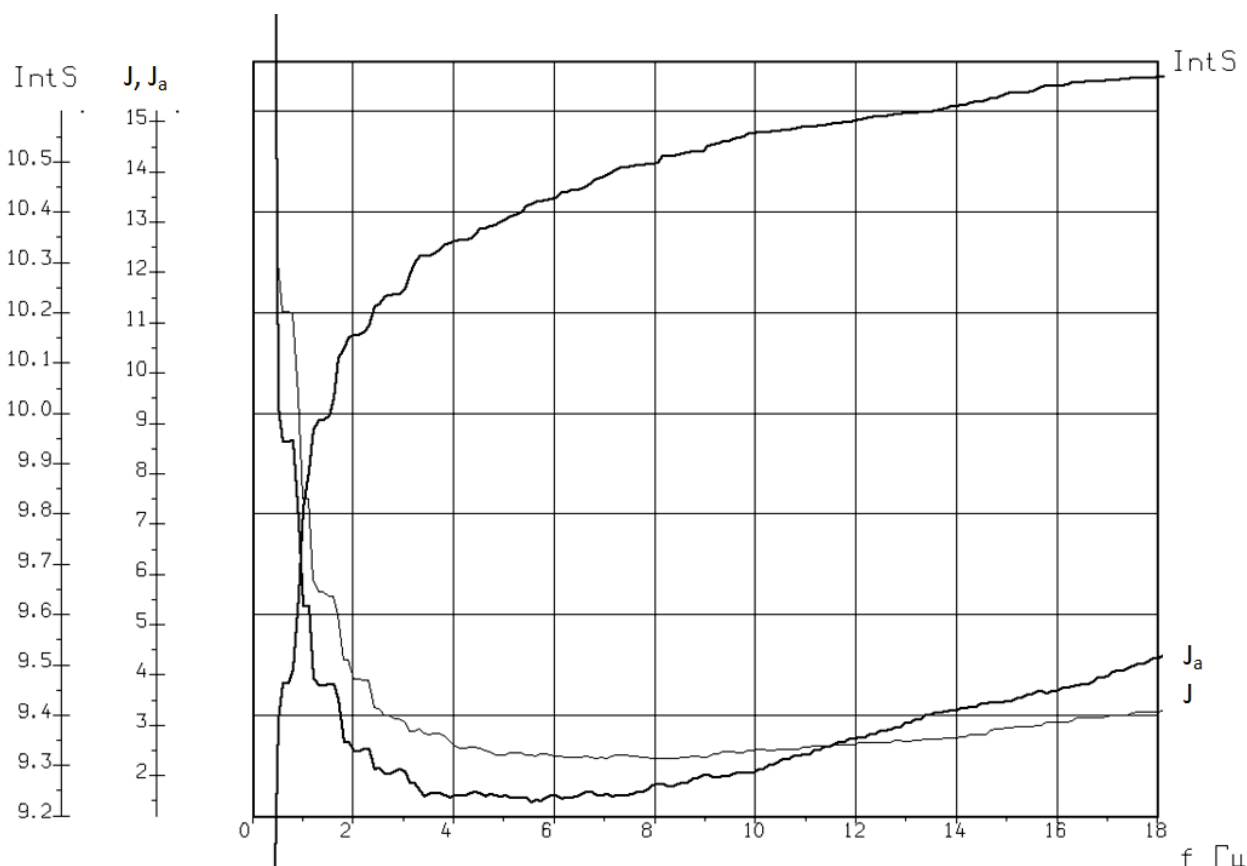


Рис. 4. Зависимости функционала (8)  $J = J(f_{\text{среза}})$  (тонкая линия без маркеров), его аппроксимации (12)  $J_a = J_a(f_{\text{среза}})$  (жирная линия) и интеграла от модуля ДПФ второго входного сигнала (маркированная линия) при наличии шумов измерений

В данном случае неограниченного по спектру сигнала определить частоту среза по зависимости  $Int S(f)$  затруднительно (оценка автора – 3,5 Гц). Оптимальная частота среза равна  $f_{\text{среза}} = 8,2$  Гц, оценка оптимального значения по зависимости  $J_a(f_{\text{среза}})$  равна  $\hat{f}_{\text{среза}} = 5,5$  Гц. Ошибка субъективного определения частоты среза равна почти 5 Гц. Влияние такой ошибки может быть значительным, например, если частоты среза выбираются для последующей идентификации производных аэродинамической силы или аэродинамического момента.

Точностные свойства предложенного метода в силу случайного характера оценки частоты среза могут быть оценены только статистически на множестве реализаций измерений. Оценим погрешность определения оптимальной частоты среза на основе аппроксимации (12) в статистических численных экспериментах путем сравнения – на одних и тех же реализациях шумов измерений – оптимальных значений частот среза с оценками оптимальных частот среза, определенными из условия минимума критерия (12). Оптимальные частоты среза определим минимизируя непосредственно функционал (8) простым пере-

бором частот из фундаментального набора частот (2).

Оценка частоты среза  $\hat{f}_{\text{среза}}$  является случайной величиной. Исчерпывающей характеристикой случайной величины является плотность распределения. Будем характеризовать вероятностно-точностные характеристики оценки  $\hat{f}_{\text{среза}}$  четырьмя величинами, связанными с плотностью распределения оценки  $\hat{f}_{\text{среза}}$ :  $K0$  – оценка вероятности события:  $\hat{f}_{\text{среза}} = f_{\text{среза}}$ ;  $K5$  – оценка вероятности события:  $|\hat{f}_{\text{среза}} - f_{\text{среза}}| < 5/T$ ;  $K10$  – оценка вероятности события:  $|\hat{f}_{\text{среза}} - f_{\text{среза}}| < 10/T$ ;  $K20$  – оценка вероятности события:  $|\hat{f}_{\text{среза}} - f_{\text{среза}}| < 20/T$ .

Событие  $|\hat{f}_{\text{среза}} - f_{\text{среза}}| < k/T$  означает, что оценка  $\hat{f}_{\text{среза}}$  есть один из  $k$  ближайших к оптимальному значению частоты среза элементов фундаментального ряда частот. Для примера, в рассматриваемых задачах событие  $|\hat{f}_{\text{среза}} - f_{\text{среза}}| < 5/T$  эквивалентно тому, что погрешность в определении оптимальной частот не превосходит  $\sim 0,5$  Гц.

В табл. 1 и 2 приведены оценки указанных вероятностей, полученные в статистических экспериментах при объеме статистических испытаний (т. е. количестве независимых реализаций шумов измерений переменных  $w_z, \Delta\alpha, \Delta\delta_B$ )  $K = 1000$ .

Таблица 1. Вероятностно-точностные характеристики оценки  $\hat{f}_{\text{среза}}$  при входном сигнале «сумма синусов»

Фазовая переменная	$K0, \%$	$K5, \%$	$K10, \%$	$K20, \%$	Разброс оптимальных частот среза
$w_z$	17,0	71,6	93,9	99,7	1,1, ..., 2,4
$\Delta\alpha$	28,0	96,9	99,8	100	0,2, ..., 0,9
$\Delta\delta_B$	75,0	96,3	99,1	100	1,1, ..., 1,6

Из данных табл. 1 следует, что предложенная оценка  $\hat{f}_{\text{среза}}$  работает, обеспечивая вероятность практически 100 % определения оптимальной частоты среза с погрешностью не более 0,5 Гц.

Таблица 2. Вероятностно-точностные характеристики оценки  $\hat{f}_{\text{среза}}$  при входном сигнале «перекладки»

Фазовая переменная	$K0, \%$	$K5, \%$	$K10, \%$	$K20, \%$	Разброс оптимальных частот среза
$w_z$	6,8	28,6	57,6	93,9	3,5, ..., 6,0
$\Delta\alpha$	77,2	100	100	100	0,4, ..., 0,9
$\Delta\delta_B$	2,0	8,7	22,8	53,3	4,6, ..., 9,9

Из данных табл. 2 следует, что в случае разрывного входного сигнала предложенная оценка  $\hat{f}_{\text{среза}}$  имеет наибольшую погрешность для входного сигнала с неограниченным спектром, обеспечивая с вероятностью 50 % определение

оптимальной частоты среза с погрешностью не более 2 Гц при разбросе оптимальных частот среза для данного параметра 4,6–9,9 Гц. Для угла атаки как наиболее гладкой функции времени оптимальная частота среза определяется с вероятностью 100 % и погрешностью не более 0,5 Гц при разбросе оптимальных частот среза 0,4–0,9 Гц. Для угловой скорости оптимальная частота среза определяется с погрешностью не более 2 Гц с вероятностью близкой к 100 %.

Покажем, что означают приведенные в табл. 1 и 2 данные в приложении к задаче идентификации производных аэродинамического момента методом наименьших квадратов в частотной области. Пусть на основе определенных ранее измерений переменных  $w_z(t_i), \Delta\alpha(t_i), \Delta\delta_B(t_i)$ , представленных на рис. 1 и 2, требуется определить коэффициенты  $\bar{M}_z^{\omega_z}, \bar{M}_z^\alpha, \bar{M}_z^{\delta_B}$  регрессии (см. первое уравнение в (13)):

$$\dot{w}_z = \bar{M}_z^{\omega_z} w_z(t) + \bar{M}_z^\alpha \Delta\alpha(t) + \bar{M}_z^{\delta_B} \Delta\delta_B(t). \quad (14)$$

Используя финитное преобразование Фурье, уравнение (14) может быть записано также в виде линейной регрессии в частотной области:

$$\tilde{w}_z(\omega)j\omega - w_z(0) + w_z(T)e^{j\omega T} = \bar{M}_z^{\omega_z} \tilde{w}_z(\omega) + \bar{M}_z^\alpha \tilde{\Delta\alpha}(\omega) + \bar{M}_z^{\delta_B} \tilde{\Delta\delta_B}(\omega), \quad (15)$$

где диакритический знак «~» над переменной означает финитное преобразование Фурье данной переменной;  $\omega$  – круговая частота. Определим изложенным выше методом частоты среза  $f_{w_z}, f_{\Delta\alpha}, f_{\Delta\delta_B}$  для измерений зависимостей  $\tilde{w}_z(\omega), \tilde{\Delta\alpha}(\omega), \tilde{\Delta\delta_B}(\omega)$  в правой части уравнения (15). Левая часть уравнения (15) представляет собой Фурье-образ производной  $\dot{w}_z$ , поэтому частоту среза для измеренной зависимости  $\tilde{w}_z(\omega)$  в левой части уравнения (15) назначим как  $f_{\dot{w}_z} = \max(f_{w_z}, f_{\Delta\alpha}, f_{\Delta\delta_B})$ . Вычислим финитные преобразования Фурье измерений зависимостей  $\tilde{w}_z(\omega_k), \tilde{\Delta\alpha}(\omega_k), \tilde{\Delta\delta_B}(\omega_k)$  для произвольного набора частот, например, для набора:

$$\omega_k = 2\pi f_k = \frac{2\pi k}{2T}, \quad k = \overline{0, M_{\dot{w}_z}}, \quad f_{M_{\dot{w}_z}} \cong f_{\dot{w}_z}, \quad (16)$$

используя интерполяцию измерений полиномом Лагранжа третьего порядка (подробнее о вычислении финитного преобразования на основе интерполяции в [1, 4]). Обнулیم вычисленные значения для частот, выше соответствующих частот среза  $f_{w_z}, f_{\Delta\alpha}, f_{\Delta\delta_B}$ , формируя таким образом оценки  $\widehat{\tilde{w}_z}(\omega_k), \widehat{\tilde{\Delta\alpha}}(\omega_k), \widehat{\tilde{\Delta\delta_B}}(\omega_k)$

Подставим оценки  $\widehat{\tilde{w}_z}(\omega_k), \widehat{\tilde{\Delta\alpha}}(\omega_k), \widehat{\tilde{\Delta\delta_B}}(\omega_k)$  вместо  $\tilde{w}_z(\omega), \tilde{\Delta\alpha}(\omega), \tilde{\Delta\delta_B}(\omega)$  в уравнение (15). Совокупность полученных уравнений при частотах из набора (16) образуют переопределенную систему уравнений, из которой можно найти оценку вектора искомых коэффициентов  $\mathbf{b} = (\bar{M}_z^{\omega_z}, \bar{M}_z^\alpha, \bar{M}_z^{\delta_B})^T$  методом наименьших квадратов

$$\hat{\mathbf{b}} = Re[(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}] Re[\mathbf{X}^t \mathbf{Y}],$$

где  $\mathbf{Y}$  – вектор с элементами  $y_k = \tilde{w}_z(\omega_k)j\omega_k - w_z(0) + w_z(T)e^{j\omega_k T}$ ;  $\mathbf{X}$  – матрица с элементами  $x_{k1} = \tilde{w}_z(\omega_k)$ ,  $x_{k2} = \tilde{\Delta}\alpha(\omega_k)$ ,  $x_{k3} = \tilde{\Delta}\delta_B(\omega_k)$ ,  $k = \overline{0, M_{\tilde{w}_z}}$ ; символ «†» означает операцию транспонирования и комплексного сопряжения матрицы.

Сравним погрешности оценок вектора  $\mathbf{b}$  в статистических численных экспериментах на множестве реализаций шумов измерений (объемом  $K = 1000$ ) при определении оценок  $\hat{\tilde{w}}_z(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\alpha}(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\delta_B}(\omega_k)$  на оптимальных частотах среза и на оценках оптимальных частот среза, полученных предложенным методом. Обозначим:

- $\Delta\hat{b}_i(\hat{f}_{\text{среза}})$  – среднеквадратическая на множестве статистических испытаний погрешность оценки  $\hat{b}_i(\hat{f}_{\text{среза}})$ , вычисленной с использованием оценок частот среза для определения  $\hat{\tilde{w}}_z(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\alpha}(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\delta_B}(\omega_k)$ , отнесенная к модулю номинала  $|b_i|$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;
- $\Delta\hat{b}_i$  – среднеквадратическая на множестве статистических испытаний погрешность оценки  $\hat{b}_i$ , вычисленной с использованием оптимальных частот среза для  $\hat{\tilde{w}}_z(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\alpha}(\omega_k)$ ,  $\hat{\tilde{\Delta}\delta_B}(\omega_k)$ , отнесенная к модулю номинала  $|b_i|$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;
- $J_b(\hat{f}_{\text{среза}}) = \sum_{i=1}^3 \hat{b}_i(\hat{f}_{\text{среза}})$  – суммарная относительная погрешность идентификации с использованием оценок частот среза;
- $J_b = \sum_{i=1}^3 \Delta\hat{b}_i$  – суммарная относительная погрешность идентификации с использованием оптимальных частот среза.

Таблица 3. Погрешности идентификации коэффициентов регрессии (15)

$\mathbf{b} = (\bar{M}_z^{\omega_z}, \bar{M}_z^{\alpha}, \bar{M}_z^{\delta_B})^T$  методом наименьших квадратов

$\Delta\delta_B(t)$	$\frac{\Delta\hat{b}_1(\hat{f}_{\text{среза}})}{\Delta\hat{b}_1}$	$\frac{\Delta\hat{b}_2(\hat{f}_{\text{среза}})}{\Delta\hat{b}_2}$	$\frac{\Delta\hat{b}_3(\hat{f}_{\text{среза}})}{\Delta\hat{b}_3}$	$\frac{J_b(\hat{f}_{\text{среза}})}{J_b}$
Сумма синусов	$\frac{0,084}{0,079}$	$\frac{0,202}{0,172}$	$\frac{0,042}{0,040}$	$\frac{0,329}{0,291}$
Перекладки	$\frac{0,046}{0,047}$	$\frac{0,087}{0,084}$	$\frac{0,031}{0,032}$	$\frac{0,163}{0,164}$

В статистических численных экспериментах установлено (табл. 3), что в задаче с входным сигналом «сумма синусов» увеличение суммарной относительной погрешности идентификации коэффициентов  $\bar{M}_z^{\omega_z}, \bar{M}_z^{\alpha}, \bar{M}_z^{\delta_B}$  при использовании предложенного метода определения частот среза по сравнению с соответствующей погрешностью их идентификации при оптимальном выборе частот среза составило не более 13 %. В задаче с входным сигналом «перекладки» суммарная относительная погрешность идентификации коэффициентов  $\bar{M}_z^{\omega_z}, \bar{M}_z^{\alpha}, \bar{M}_z^{\delta_B}$  при использовании предложенного метода определения частот

среза и соответствующая погрешность их идентификации при оптимальном выборе частот среза оказались приблизительно одинаковыми.

Результаты статистических экспериментов показывают, что погрешности идентификации отдельных компонент вектора идентифицируемых параметров в целом невелики, за исключением погрешности идентификации коэффициента  $\bar{M}_z^\alpha$  при входном сигнале «сумма синусов», что объясняется большим (более 100 %) отношением шум/сигнал для угла атаки – фактора при данном коэффициенте в уравнении регрессии (15).

Отметим, что при изменении объема статистических испытаний вдвое значения суммарных относительных погрешностей идентификации изменялись не более чем на 0,004.

## **Заключение**

Предложен метод определения оптимальной частоты среза для выделения информативной низкочастотной части Фурье-образа измеренного сигнала. Метод прост и не имеет настроечных параметров, оценка оптимальной частоты среза определяется только измерениями. Проведенное статистическое численное исследование метода в приложении к задачам идентификации аэродинамических характеристик самолета подтвердило его работоспособность.

Оценка Фурье-образа истинного сигнала может быть при необходимости использована для вычисления обратным преобразованием Фурье сглаженной оценки сигнала и его производной во временной области.

Полученные результаты позволяют рекомендовать предложенный метод оценки оптимальной частоты среза к использованию при проведении численных экспериментов и к апробации при обработке данных летных испытаний.

## **Библиографический список**

1. Klein V., Morelli E.A. Aircraft System Identification – Theory and Practice. Reston, VA: AIAA, AIAA Education Series, 2006. 484 p.
2. Jategaonkar R. Flight vehicle system identification: a time-domain methodology. Reston, VA: AIAA, 2015. 628 p.
3. Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К. Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 719 с.
4. Овчаренко В. И., Поплавский Б. Л., Ефремов А. В. Частотные методы идентификации в задачах динамики воздушных судов. М.: ЛЕНАД, 2022. 457 с.
5. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Часть III. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 368 с.
6. Григорьев Н. В. Оптимизация параметров алгоритмов цифрового сглаживания полетной информации // Авиакосмическая техника и технология. 2014. № 4. С. 65–71.
7. Григорьев Н. В. Минимизация погрешности линейной оценки полезного сигнала при слепополетной обработке его измерений // Полет. 2021. № 2. С. 3–12. EDN: TPWYXI

8. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. R. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing. New York, Cambridge University Press, 1992. 963 p.

9. Кокошкин А. В., Коротков В. А., Коротков К. В., Новичихин Е. П. Использование универсального опорного спектра для оценки отношения шум – сигнал в фильтре Винера // Журнал радиоэлектроники. 2015. № 7. С. 9–17. EDN: UMAENF

10. Степанов О. А., Челпанов И. Б., Лопарев А. В. Использование частотно-временного подхода при решении задач обработки навигационной информации // Материалы пленарного заседания 5-й Российской мультikonференции по проблемам управления. 09–11 октября 2012, Санкт-Петербург, Россия. СПб.: Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2012. С. 64–80. EDN: SHEYSN

11. Васильев К. К., Дементьев В. Е., Андриянов Н. А. Фильтр Винера для дважды стохастических случайных процессов // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем: сборник научных трудов. 2016. № 10. С. 119–122. EDN: WYYUYP

12. Кузнецов Д. С. Алгоритм работы программной реализации фильтра Винера // Естественные и технические науки. 2009. № 4(42). С. 365–369. EDN: KZADMT

13. Morelli E. A. Practical Aspects of the Equation-Error Method for Aircraft Parameter Estimation // AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, 21 August – 24 August 2006, Keystone, Colorado. DOI: 10.2514/6.2006-6144

14. Morelli E. A., Grauer, J. A. Practical Aspects of Frequency-Domain Approaches for Aircraft System Identification // Journal of Aircraft. 2020. Vol. 57, Iss. 2. DOI: 10.2514/1.C035599

15. Gupta N. K., Hall W. E. Jr. Input Design for Identification of Aircraft Stability and Control Derivatives. Contractor Report. NASA CR-2493. NASA, 1975. 142 p.

**Дата поступления:** 28.06.2024

**Решение о публикации:** 17.07.2024

### **Контактная информация:**

ГРИГОРЬЕВ Николай Валерьевич – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник (Летно-исследовательский институт им. М. М. Громова, Россия, 140180, Жуковский, ул. Гарнаева, д. 2А), lab76@lii.ru

### **References**

1. Klein V., Morelli E. A. Aircraft System Identification – Theory and Practice. Reston, VA: AIAA, AIAA Education Series, 2006, 484 p.

2. Jategaonkar R. Flight vehicle system identification: a time-domain methodology. Reston, VA: AIAA, 2015, 628 p.

3. Vasilchenko K. K., Leonov V. A. Pashkovskiy I. V., Poplavskiy B. K. Letnye ispytania samoletov [Aircraft Flight Testing]. Moscow: Masinostroenie. 1996, 719 p. (In Russian)

4. Ovcharenko V. I. Poplavskiy B. K. Efremov A. V. Chastotnye metody v zadachah dinamiki vozдушnyh sudov [Frequency methods of identification in aircraft dynamics problems]. Moscow: Publishing House “LENAD”, 2022, 457 p. (In Russian)

5. Barteniev O. V. Fortran dla professionalov. Matematicheskaya biblioteka IMSL. [FORTRAN for professionals. IMSL Mathematical Library]. Pt. 3, Moscow: Publishing House “Dialog-MIFI”, 2001, 368 p. (In Russian)

6. Grigoriev N.V. Optimizaciya parametrov algoritmov cifrovogo sglagivaniya poletnoy informacii [Optimization of algorithm parameters for digital smoothing of flight information]. *Aerospace technology*. 2014. No. 4, pp. 65–71. (In Russian)

7. Grigoriev N. V. Error minimization in the linear estimate of the valid signal in post-flight processing of its measurements. *Polyot*. 2021. No. 2, pp. 3–12. (In Russian) EDN: TPWYXI

8. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. R. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge University Press, 1992, 963 p.

9. Kokoshkin A. V., Korotkov V. A., Novochihin E. P. Ispolzovanie universalnogo opornogo spectra dla ochenki otnosheniya shum-signal v filter Winera [Using the method of renormalization limited to restore the distorted image in the presence of interference and noise with unknown parameters]. *Gurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics]. 2015. No. 7, pp. 9–17. (In Russian) EDN: UMAENF

10. Stepanov O. A., Chelpanov I. B., Loparev A. V. Ispolzovanie chastoto-vremennogo podhoda pri reshenii zadach obrabotki navigacionnoy informacii [Application of the time-frequency approach in solving problems of processing navigation information]. Materialy plenarnogo zasedaniya 5-iy Rossiyskoy multiconferencii po problemam upravleniya [Proceedings of the plenary session of the 5th Russian Multiconference on Management Problems, October 9–11, 2012, Saint-Petersburg, Russia]. Saint Petersburg: Concern “CNII Electropribor”, 2012, pp. 64–80. EDN: SHEYSN. (In Russian)

11. Vasiliev K. K., Dementiev V. E., Andrianov N. A. Filtr Winera dla dvagdy stohasticheskikh sluchainykh processov. Sovremennye problem proectirovaniya, proizvodstva i ecspluatacii radio-tehnicheskikh system [Wiener filter for doubly stochastic random processes. Current problems of design, production, and operation of radio engineering systems: collection of scientific papers]. 2016. No. 10, pp. 119–122. EDN: WYYUYP. (In Russian)

12. Kuznecov D. S. Wiener filter software implementation algorithm. *Natural and technical sciences*. 2009. No. 4 (42), pp. 365–369. EDN: KZADMT. (In Russian)

13. Morelli E. A. Practical Aspects of the Equation-Error Method for Aircraft Parameter Estimation. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, 21 August – 24 August 2006, Keystone, Colorado. DOI: 10.2514/6.2006-6144

14. Morelli E. A., Grauer J. A. Practical Aspects of Frequency-Domain Approaches for Aircraft System Identification. *Journal of Aircraft*. 2020. Vol. 57, Iss. 2. DOI: 10.2514/1.C035599

15. Gupta N. K., Hall W. E. Jr. Input Design for Identification of Aircraft Stability and Control Derivatives. Contractor Report. NASA CR-2493. NASA, 1975, 142 p.

**Date of receipt:** June 28, 2024

**Publication decision:** July 17, 2024

**Contact information:**

Nikolay V. GRIGORIEV – Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Leading Researcher (Gromov Flight Research Institute, Russia, 140180, Zhukovsky, Garnaeva ul., 2A), lab76@lii.ru