

УДК 533.6.011

ДИНАМИКА УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОДОЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ (К УТОЧНЕНИЮ ЭВОЛЮЦИИ)

А. Н. Богданов^{1,2}

¹ НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

² Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация. Получена аналитическая зависимость скорости распространения плоской ударной волны от распределения плотности и температуры перед ее фронтом для случая одномерной геометрии неоднородности, организованной в направлении распространения исследуемой волны. Полученная зависимость не имеет ограничений на интенсивность рассматриваемой ударной волны. Предложен метод расчета изменения интенсивности ударной волны при ее прохождении слоя стратификации. Показана роль локальных, интегральных и нелинейных эффектов.

Ключевые слова: газовая динамика, аэродинамика, ударные волны, нелинейные процессы, стратифицированная среда, асимптотические разложения

Для цитирования: Богданов А. Н. Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией (к уточнению эволюции) // Аэрокосмическая техника и технологии. 2023. Т. 1, № 3. С. 13–25. EDN EMCZUH

DYNAMICS OF SHOCK WAVES IN MEDIA WITH LONGITUDINAL STRATIFICATION (TO REFINE EVOLUTION)

A. N. Bogdanov^{1,2}

¹ Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

² Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract. An analytical dependence of the velocity of propagation of a plane shock wave on the distribution of density and temperature ahead of its front has been obtained for the case of a one-dimensional geometry of an inhomogeneity arranged in the direction of propagation of the wave under study. The resulting dependence has no restrictions on the intensity of the shock wave in question. A method is proposed for calculating the change in the intensity of the shock wave as it passes through the stratification layer. The role of local, integral and nonlinear effects is shown.

Keywords: gas dynamics, aerodynamics, shock waves, nonlinear processes, stratified medium, asymptotic expansions

For citation: Bogdanov A. N. Dynamics of shock waves in media with longitudinal stratification (to refine evolution). *Aerospace Engineering and Technology*. 2023. Vol. 1, no. 3, pp. 13–25. EDN EMCZUH

Введение

Исследование динамики ударных волн (УВ) в неоднородных газовых средах относится к числу актуальных задач [1]. Постановки задач такого рода являются естественным развитием классических исследований по динамике УВ в однородной среде [2]. Первым в этом направлении считается Чизнелл [3].

Сложность исследования указанных задач первоначально определила путь поиска их решений. Для некоторых видов стратификации плотности перед фронтом УВ удалось получить автомодельные решения. Исследования Сакураи [4] для изменения плотности по степенному закону $\rho_0 \sim x^\alpha$ показали, что в этом случае скорость УВ $U \sim x^{-\lambda}$, $\lambda = \lambda(\alpha)$ (для $\gamma = 1,4$, $\alpha = 2$, например, получено $\lambda / \alpha = 0,19667$). Для экспоненциального убывания плотности автомодельные решения построены Хейзом [5]. Условия усиления (ослабления) плоских, осесимметричных и сферических УВ, сходящихся в газе переменной плотности, которая изменяется по степенному закону в направлении движения волны, получены Ф. Л. Черноусько [6].

Распространение УВ в газовой среде с экспоненциальным распределением плотности исследовано в 1960 г. А. С. Компанейцем [7] в связи с сильным точечным взрывом в неоднородной атмосфере. Рассчитан закон движения УВ и показано ускорение УВ при распространении вверх по атмосфере (в сторону уменьшения плотности) и замедление – в противоположном направлении, следствием чего было приобретение поверхностью фронта УВ (сначала сферической) яйцевидной формы.

Обзору полученных к концу 1970-х годов достижений и изложению собственных оригинальных результатов в этой области посвящена гл. 8 монографии Дж. Уизема [8]. Хотя результаты Уизема были довольно близки к [4, 5], разность показателей составляла 3–10 % с [4] и достигала 15 % с [5] (эти отличия автором объяснялись не такими сильными локальными эффектами, как для степенного закона с $\rho_0 \rightarrow 0$ для конечного значения x). Оригинальность способа получения зависимости скорости возмущения от параметров среды оставляла вопросы о справедливости полученных результатов.

Оригинальный математический подход к задаче распространения одномерной УВ в покоящемся политропном газе с заданным (одномерным) распределением давления $p = p(\xi)$ изложен Л. В. Овсянниковым [9]. Автором отмечено, что полученные аналитической зависимости скорости УВ от параметров среды перед ней в указанной постановке является сложной задачей, и прямой подход к ее решению не предусматривается. Реализованный в статье метод приближенного решения задачи построен автором на сравнении искомой зависимости с известным законом для однородного фона в предположении локальной определенности изменений (независимости от «истории» процесса) и линейности отклика движения УВ на изменения фона (предполагавшиеся слабыми), использовалось решение задачи о распаде разрыва [10].

Численное исследование динамики УВ в неоднородной среде проведено в работе [11]. Рассмотрены случаи прохождения УВ слоя постоянной повышенной или пониженной плотности и температуры при постоянном давлении (охлажденный или нагретый газ), а также другой молекулярной массы и показателя адиабаты (газ не просто нагрет, но и его молекулы диссоциированы или, наоборот, неоднородность образована холодным газом из многоатомных молекул, или другие варианты). Использовано уточненное уравнение состояния для продуктов сгорания, образующихся в результате энерговыделения, порождающего УВ. Ситуации, допускающие аналитическое исследование задач такого рода, квалифицированы как идеализированные, отмечена недостаточность эксперимента для получения полной картины течения. Траектории УВ и контактных разрывов представлены в виде графиков, аналитические зависимости по ним не выводились. Определены условия усиления УВ по выходу из слоя неоднородности.

Аналитический подход к исследованию задач динамики УВ в неоднородных средах предложен автором данной статьи [12].

Линейный анализ. Рассмотрим плоскую УВ, входящую в область с одномерной, в направлении распространения УВ, стратификацией плотности и температуры при том, что давление постоянно, а среда покоится:

$$\rho_0 = \rho_0(x), T_0 = T_0(x), p_0 = \text{const}, u_0 = 0.$$

Одномерную продольную стратификацию плотности будем рассматривать как последовательность тонких перпендикулярных направлению распространения УВ слоев, в каждом из которых изменение плотности $\delta\rho_0(x)$ мало $\delta \ll 1$. По постановке задачи заданное малое возмущение определит величину первого порядка малости рассматриваемой задачи. В этом случае в каждом указанном слое можно представить изменение скорости УВ в виде ряда по малому параметру – отклику на малое изменение плотности в слое:

$$D = D(0) + \delta D(x) + \delta^2 D(x) + \dots$$

Аналогичные ряды для соответствующих параметров течения газа за фронтом УВ имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= p(0) + \delta p(x) + \delta^2 p(x) + \dots, \quad \rho = \rho(0) + \delta \rho(x) + \delta^2 \rho(x) + \dots, \\ u &= u(0) + \delta u(x) + \delta^2 u(x) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Для плоской УВ параметры до ее фронта и за ним связаны соотношениями [13]:

$$\rho_0 D = \rho(D - u), \quad p_0 = p - \rho_0 D u, \quad \frac{p_0}{\gamma - 1} D = \rho_0 D \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) - p u. \quad (2)$$

Подставляя (1) в соотношения (2) для членов первого порядка малости по δ , получим:

$$\delta \rho_0 D + \rho_0 \delta D = \delta \rho (D - u) + \rho (\delta D - \delta u),$$

$$0 = \delta p + u(\delta \rho_0 D + \rho_0 \delta D) - \rho_0 D \delta u, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\gamma - 1} \delta D = & (\delta \rho_0 D + \rho_0 \delta D) \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{(\gamma - 1) \rho} \right) + \\ & + \rho_0 D \left(\frac{\delta p}{(\gamma - 1) \rho} + u \delta u - \frac{p}{(\gamma - 1) \rho} \frac{\delta \rho}{\rho} \right) - u \delta p - p \delta u. \end{aligned}$$

Дополнительное соотношение для замыкания системы (3) следует получить из системы уравнений, описывающих возмущенное течение за фронтом УВ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + u \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} \delta u = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta u + u \frac{\partial}{\partial x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \delta p = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta p + u \frac{\partial}{\partial x} \delta p + a^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + u \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho \right) = 0, \end{aligned}$$

где a – скорость звука. Эту систему удобно представить в характеристической форме:

$$\rho a \frac{d_{\pm}}{dt} u \pm \frac{d_{\pm}}{dt} p = 0, \quad \frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4)$$

Система (4) описывает два акустических возмущения, распространяющихся от фронта УВ и к нему:

$$\rho a \delta u \pm \delta p = \text{const}.$$

Если принять, что возмущения, приходящие на фронт УВ сзади, дополнительно не создаются (отсутствуют), то для возмущений первого порядка малости за фронтом УВ имеет место связь величин первого порядка малости:

$$\delta p = -\rho a \delta u. \quad (5)$$

Разрешая систему (3) и (5), можно получить:

$$\frac{\delta D(x)}{D} = - \frac{a - \frac{\gamma - 1}{2} u}{D + a - \frac{\gamma - 1}{2} u} \frac{\delta \rho_0(x)}{\rho_0}. \quad (6)$$

Переходя от точки к точке по оси x и в каждой повторяя процедуру определения возмущения скорости (6), можно проследить весь процесс изменения интенсивности УВ в рассматриваемой неоднородности. Полученную пошаговую зависимость можно приближенно заменить дифференциальной связью скорости УВ от значения плотности перед ее фронтом, разделив обе части уравнения (6) на малое приращение координаты δx и переходя к пределу при $\delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dx} = \beta \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx}, \quad \beta = -\frac{a - \frac{\gamma-1}{2}u}{D + a - \frac{\gamma-1}{2}u}. \quad (7)$$

Параметры течения u , a определяются по соотношениям (2). Поскольку u , a – функции D , ρ_0 , то коэффициент β не является константой, и уравнение (7) – неявная зависимость $D = D(\rho_0)$.

Для УВ большой интенсивности зависимость (7) существенно упрощается, и коэффициент β в дифференциальной связи (7) – постоянная величина:

$$u = \frac{2}{\gamma+1}D, \quad a = \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}D; \quad (8)$$

$$\beta = -\frac{1}{2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}.$$

Для $\beta = \text{const}$ связь (7) легко интегрируется:

$$\frac{D(x)}{D(0)} = \left(\frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} \right)^\beta, \quad (9)$$

где $D(0)$, $\rho_0(0)$ – начальные данные задачи (скорость УВ и плотность перед ее фронтом до входа в область стратификации). При $\gamma = 1,4$, согласно (8), имеем $\beta \approx -0,21525$.

Зависимость (9) совпадает с полученной ранее [8]. Для слабых УВ ($D \rightarrow a$) β также стремится к постоянному значению, равному $-0,5$ независимо от величины γ . Вычисление производной $d\beta/dD$ показывает, что с ростом D коэффициент β меняется от $\beta = -0,5$ до $\beta \approx -0,21525$.

Отрицательность коэффициента β при любых значениях определяющих его величин D , u_1 , a_1 в зависимости (7) показывает, что, входя в область пониженной плотности, УВ ускоряется, а в среде с повышенной плотностью – замедляется. Сравнительно эти изменения малы – для сильных УВ в воздухе ($\gamma = 1,4$) пять порядков изменения плотности дают один порядок изменения скорости, для слабых УВ для изменения скорости на порядок нужно два порядка изменения плотности. По (8) видно, что коэффициент β сильно зависит от γ ($\beta \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 1$).

На приведенных в [11] расчетных графиках для $\rho/\rho_0 = 10; 1; 0,1$ зависимость $D = D(\rho_0)$ линейная. Видны слабое различие случаев разного γ и колебания значений скорости УВ по выходу из неоднородности даже для $\rho/\rho_0 = 1$, чего (9) не дает.

Уточненный анализ. Недостатком полученной зависимости (7) и следствий из нее является то обстоятельство, что УВ «забывает» прохождение стратифицированных слоев, как только значение плотности перед ее фронтом принимает первоначальное значение $\rho_0(0)$. Возможно, этого и следовало ожидать, поскольку в основе вывода зависимости (7) лежит учет только линейного отклика движения УВ на

изменение плотности перед ее фронтом, а необратимые эффекты в газодинамических волновых процессах учитываются членами третьего порядка малости по амплитуде возмущения [14].

Расчет изменения интенсивности УВ при прохождении слоев стратификации может быть выполнен следующим образом. Вычислим член второго порядка малости разложения для скорости УВ:

$$D = D(0) + \delta D(x) + \delta^2 D(x) + \dots$$

Для второго приближения из условий на разрыве имеем (возмущение плотности перед фронтом УВ полностью определяется членом первого порядка малости $\delta\rho_0(x)$ и никаких членов более высокого порядка малости не содержит):

$$\begin{aligned} \rho_0 \delta^2 D &= \rho(\delta^2 D - \delta^2 u) + \delta^2 \rho(D - u) - \delta\rho_0 \delta D + \delta\rho(\delta D - \delta u) \\ 0 &= \delta^2 p - \rho_0 u \delta^2 D - \rho_0 D \delta^2 u - (\delta\rho_0 D + \rho_0 \delta D) \delta u - u \delta\rho_0 \delta D \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\gamma - 1} \delta^2 D &= \rho_0 \delta^2 D \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) + \rho_0 D \left(u \delta^2 u + \frac{\delta^2 p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \frac{\delta^2 \rho}{\rho} \right) - u \delta^2 p - p \delta^2 u + \\ &+ (\delta\rho_0 D + \rho_0 \delta D) \left(u \delta u + \frac{\delta p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \delta\rho_0 \delta D \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) - \delta p \delta u. \end{aligned}$$

Из уравнений движения газа за фронтом УВ следует:

$$\rho a \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 u + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \delta^2 u \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 p + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \delta^2 p \right) = Q, \quad (11)$$

откуда

$$\delta^2 p = -\rho a \delta^2 u - \int_0^L Q dx,$$

где, с учетом $\delta\rho = -\rho a \delta u$, неоднородный член есть

$$Q = - \left[(\rho \delta a + a \delta \rho) \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta u + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \delta u \right) \right].$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} W_1 &= \delta\rho(\delta D - \delta u) - \delta\rho_0 \delta D, \quad W_2 = -\delta\rho_0(u \delta D + D \delta u) - \rho_0 \delta D \delta u, \\ W_3 &= (\delta\rho_0 D + \rho_0 \delta D) \left(u \delta u + \frac{\delta p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \delta\rho_0 \delta D \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) - \delta p \delta u, \\ I &= \int_0^L Q dx. \end{aligned}$$

Разрешая систему (10) и (11), получим:

$$\delta^2 D = -\frac{\gamma-1}{\rho_0 u \left(D + a - \frac{\gamma-1}{2} u \right)} \left[\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} W_1 + \left(u - \frac{a}{\gamma-1} \right) W_2 + W_3 - I \left(D - \frac{a+u}{\gamma-1} \right) \right]. \quad (12)$$

Для сильных УВ:

$$W_1 = 0, \quad \left(u - \frac{a}{\gamma-1} \right) W_2 = -(2+\beta)(4\beta+1) \frac{2D^3}{(\gamma+1)^2} \frac{(\delta\rho_0)^2}{\rho_0},$$

$$W_3 = \beta(5-4\beta) \frac{2D^3}{(\gamma+1)^2} \frac{(\delta\rho_0)^2}{\rho_0},$$

и выражение (12) упрощается:

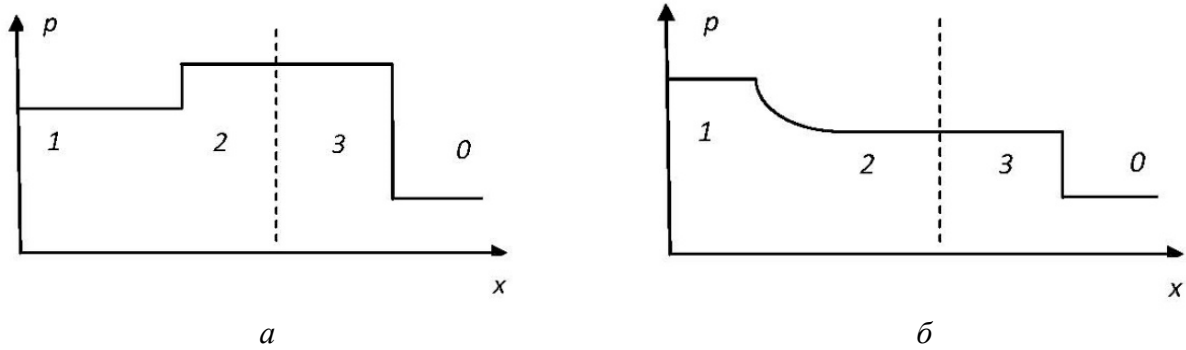
$$\delta^2 D = 4\beta(1+2\beta) \frac{\gamma-1}{2+\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \left(\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} \right)^2 D - (1+\beta)\beta \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (\gamma^2 - \sqrt{2\gamma(\gamma-1)} - 3) \frac{1}{D\rho_0} \int_0^L D \delta\rho_0 \frac{d}{dt} \left(D \frac{\delta\rho_0}{\rho_0} \right) dx. \quad (13)$$

Поскольку для сильных волн $\beta \approx -0,2$, то первое слагаемое в (13) отрицательно, следовательно, локальные эффекты ослабляют УВ. Вклад же интегральных членов может быть отрицательным, положительным, нулевым в зависимости от конкретного вида профиля неоднородности.

Полученные результаты допускают уточнение учетом следующих членов разложения $\delta^3 D(x)$, $\delta^4 D(x)$ и т.д. Сходимость ряда определяется величиной δ и видом зависимости $\rho_0 = \rho_0(x)$ (хотя от асимптотических методов сходимости не требуется [15], важна близость получаемого приближения к истинному решению). Вносимая на каждом переходе от слоя к слою поправка второго порядка малости относительно невелика $\delta^2 D / \delta D \sim \delta\rho_0 \ll 1$.

Нелинейный анализ. Рассмотрим задачу расчета параметров УВ, прогрессирующей через неоднородную среду, используя теорию распада произвольного разрыва [11]. Представим область стратификации слоем постоянной, отличной от начальной, плотности, приняв за ее величину максимальное отклонение плотности в области стратификации от начального значения. Распад разрыва будет происходить по-разному в зависимости от того, большую или меньшую плотность по сравнению с исходной имеет среда, в которую вышла УВ (см. рисунок).

В первом случае назад в среду, откуда пришло возмущение, отражается УВ, и задача описывается соотношениями на трех УВ: исходной, прошедшей и отраженной. Во втором случае отраженная волна – волна разрежения и вместо соотношений на отраженной УВ следует использовать соотношения на волне Римана и уравнение адиабатического состояния газа.



Схемы распада разрыва на входе в более (а) и менее (б) плотную среду

Рассмотрим вход УВ заданной скорости $D(0)$ в более плотную среду $\rho_0 > \rho(0)$. Для решения задачи используются соотношения (см. рисунок) [8]:

- на падающей на границу раздела сред различной плотности исходной УВ

$$u_1 = 2a(0) \frac{M(0)^2 - 1}{(\gamma + 1)M(0)}, \quad p_1 = p_0 \frac{2\gamma M(0)^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)},$$

$$\rho_1 = \rho(0) \frac{(\gamma + 1)M(0)^2}{(\gamma - 1)M(0)^2 + 2}, \quad M(0) = \frac{D(0)}{a(0)}, \quad (14)$$

где $\rho(0)$, $M(0)$ – заданы, а ρ_1 , p_1 , u_1 – по ним рассчитываются;

- на прошедшей в слой волне

$$u_3 = 2a_0 \frac{M^2 - 1}{(\gamma + 1)M}, \quad p_3 = p_0 \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad M = \frac{D}{a_0}, \quad (15)$$

где D , p_3 , u_3 подлежат определению в процессе решения задачи;

- на отраженной волне

$$u_2 - u_1 = 2a_1 \frac{M_1^2 - 1}{(\gamma + 1)M_1}, \quad p_2 = p_1 \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad M_1 = \frac{D_1 - u_1}{a_1}, \quad (16)$$

где p_2 , u_2 , D_1 в (16) неизвестны и определяются в процессе решения задачи; параметры с индексом 1 отвечают состоянию перед ее фронтом, 2 – за ее фронтом.

Соотношения (14)–(16) дополняют условия на контактной разрыве:

$$u_2 = u_3, \quad p_2 = p_3, \quad \rho_2 \neq \rho_3. \quad (17)$$

Система из шести уравнений (15)–(17) для шести неизвестных $p_{i=2,3}$, $u_{i=2,3}$, M , M_1 разрешима, ее можно свести к единственному уравнению для величины M прошедшей УВ:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[M^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right] + M(0)^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left[\sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_0}} \frac{M^2-1}{M} - \frac{M(0)^2-1}{M(0)} \right]} = \\ & = \sqrt{M(0)^2 + \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{M^2}{M(0)^2} - 1 \right)}. \end{aligned} \quad (18)$$

В приближении сильных УВ:

$$M \gg 1, \frac{p_0}{p_1} \rightarrow 0,$$

из (18) следует

$$M(0)^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{M}{M(0)} \right)^2 + 1 \right) \left(\sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_0}} \frac{M}{M(0)} - 1 \right)^2 = \left(\left(\frac{M}{M(0)} \right)^2 - 1 \right)^2.$$

Рассмотрим вход в очень плотную среду $\frac{\rho(0)}{\rho_0} \ll 1$. В более плотной среде УВ тормозится $\frac{M}{M(0)} < 1$, поэтому слагаемым $\sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_0}} \frac{M}{M(0)} \ll 1$ можно пренебречь и решить редуцированное уравнение, квадратное для $\left(\frac{M}{M(0)} \right)^2$. С учетом соотношения $\frac{M}{M(0)} = \frac{D}{D(0)} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(0)}}$ имеем:

$$\frac{D}{D(0)} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1} M(0) \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_0}}. \quad (19)$$

Зависимость $D \sim \rho_0$ (19) опять имеет степенной вид, но для сильных волн различие в показателе степени (-0,5 против -0,21 при $\gamma = 1,4$) дает в решение почти три порядка отличия от даваемого линейной теорией (п.1). Нелинейность процесса играет значительную роль в изменении его параметров.

При входе УВ в область пониженной плотности $\rho_0 > \rho(0)$ вместо отраженной УВ развивается центрированная волна разрежения, распространяющаяся в область, откуда пришла УВ. Имеем те же соотношения (14), (15), (17), только вместо (16) следует использовать на отраженной волне разрежения – соотношение Римана на характеристике $\frac{dx}{dt} = u_1 + a_1$ и уравнение изэнтропического состояния газа:

$$u_2 + \frac{2}{\gamma-1} a_2 = u_1 + \frac{2}{\gamma-1} a_1, \quad \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma}. \quad (20)$$

Система семи уравнений (15), (17), (20) для семи неизвестных $u_2, p_2, \rho_2, u_3, p_3, \rho_3, D$ разрешима. В этом случае для определения M имеем квадратное уравнение, у которого условиям рассматриваемой задачи соответствует положительное решение, откуда можно получить зависимость для D :

$$\left(\frac{M}{M(0)}\right)^2 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(0)}} H \frac{M}{M(0)} - \frac{1}{M(0)^2} = 0,$$

$$H = \left[1 - \frac{1}{M(0)^2} + \frac{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{M(0)^2}} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M(0)^2}}}{M(0)} \right]; \quad (21)$$

$$\frac{M}{M(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(0)}} H + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho(0)} H^2 + \frac{1}{M(0)^2}}; \quad D = \frac{1}{2} H + \sqrt{\frac{1}{4} H^2 + \frac{\rho(0)}{\rho_0} \frac{1}{M(0)^2}}.$$

Формула (22) показывает ускорение УВ в нагретой разреженной среде, но зависимость изменения скорости УВ D от перепада $\frac{\rho_0}{\rho(0)}$ слабая из-за малости слагаемого $\frac{\rho(0)}{\rho_0} \frac{1}{M(0)^2}$.

Для слабых УВ $M(0) \rightarrow 1$ из (22) следует:

$$D \sim D(0) \frac{\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}}{\gamma-1},$$

где при $\gamma = 1,4$ в нагретом разреженном газе увеличивается скорость слабой УВ почти в пять раз.

Для сильных УВ $M(0) \gg 1$ $H \approx \left[1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{M(0)} \right]$ и из (22) имеем:

$$D \sim D(0) \left(1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{M(0)} + \frac{\rho(0)}{\rho_0} \frac{1}{M^2(0)} \right),$$

т.е. от сильных УВ эффект ускорения невелик.

Последовательно применяя соотношения (19) и (21), можно определить эффект прохождения УВ стратифицированного слоя (при использовании метода распада произвольного разрыва, неважно в какой последовательности проходит УВ слои пониженной и повышенной плотности). Для сильных УВ имеем:

$$D \sim D(0) \left(1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{M(0)} \right) \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M(0) \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_0}}.$$

Основной вклад в изменение скорости дает эффект распада на холодном плотном слое.

Таким образом, эволюция УВ в неоднородной среде определяется не только локальными, но и интегральными факторами, при этом являясь принципиально нелинейным процессом. Следует отметить принципиальное отличие процесса локального распада разрыва на границе двух сред от прогрессии УВ через стратифицированный слой, являющейся принципиально задачей интегрального воздействия из-за взаимодействия УВ с локальными возмущениями, хотя и приходящими на фронт УВ извне, но являющиеся следствием самого исследуемого распространения УВ в такой среде. Интегральные воздействия по мере прохождения стратифицированного слоя могут становиться более весомыми.

Заключение

Полученная зависимость скорости распространения УВ от параметров среды перед ее фронтом может быть использована для предварительных оценок газодинамических процессов в неоднородных средах, течений газа с большими скоростями, оценок воздействий мощных взрывов, движения летательных аппаратов с высокими скоростями, в частности при разработке способов воздушной защиты от звукового удара.

Проведенное исследование показало, что значительное изменение скорости УВ достигается значительными, на порядок большими требуемого изменения скорости, изменениями плотности или температуры среды перед фронтом волны (в рассмотренных условиях покоящейся среды и постоянного давления). Изменение интенсивности УВ на слоях стратификации определяется не только локальными, но и интегральными эффектами, последние по мере прохождения стратифицированного слоя могут становиться более весомыми. Рассмотренный процесс является нелинейным.

Предложенный метод может быть применен и к случаям движущейся среды и непостоянного давления.

Благодарность. Работа выполнена в соответствии с планом научных исследований НИИ механики МГУ и МГТУ имени Н. Э. Баумана.

Памяти Л. В. Овсянникова (1919–2014). Автор сохранил благодарные чувства к Л. В. Овсянникову за неизменную осязательную поддержку в минуты «острых теоретических переживаний». Эту задачу на ранних этапах исследования автор обсуждал с В. Ф. Куропатенко, к сожалению, не увидевшего эту работу окончательной. Автор благодарен Валентину Федоровичу за дружбу и поддержку в работе на протяжении 25 лет знакомства.

Библиографический список

1. Гласс И. И. Ударные волны и человек. М.: Мир, 1977. 191 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.

3. Chisnell R. F. The normal motion of a shock wave through a nonuniform one-dimensional medium // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1955. Vol. 232. Iss. 1190. Pp. 350–370. DOI: 10.1098/rspa.1955.0223
4. Sakurai A. On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1960. Vol. 13. Iss. 3. Pp. 353–370. DOI: 10.1002/cpa.3160130303
5. Hayes W. D. Self-similar strong shocks in an exponential medium // *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 32. Iss. 2. Pp. 305–315. DOI: 10.1017/S002211206800073X
6. Черноусько Ф. Л. Сходящиеся ударные волны в газе переменной плотности // *Прикладная математика и механика*. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 885–896.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
8. Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons, 1974. 635 p.
9. Овсянников Л. В. Приближенный метод пересчета закона распространения ударных волн // *Прикладная механика и техническая физика*. 1972. № 1. С. 55–57.
10. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Т. 2. М.–Л.: АН СССР, 1949.
11. Левин В. А., Ласковский М. В. Распространение взрывных волн в неоднородной среде. 1989. № 3776. 70 с.
12. Богданов А. Н. Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией // *Доклады РАН*. 2020. Т. 491. № 1. С. 5–6. DOI: 10.31857/S2686740020020066
13. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.

Дата поступления: 01.09.2023

Решение о публикации: 07.09.2023

Контактная информация:

БОГДАНОВ Андрей Николаевич – канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник (НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1.; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.), bogdanov@imec.msu.ru

References

1. Glass I. I. *Udarnye volny i chelovek [Shock Waves and Man]*. Russian Translation. Moscow: Mir, 1977, 191 p. (In Russian)
2. Sedov L. I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike [Similarity and Dimensional Methods in Mechanics]*. Moscow: Nauka, 1981, 448 p. (In Russian)
3. Chisnell R. F. The normal motion of a shock wave through a nonuniform one-dimensional medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1955. Vol. 232. Iss. 1190, pp. 350–370. DOI: 10.1098/rspa.1955.0223
4. Sakurai A. On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1960. Vol. 13. Iss. 3, pp. 353–370. DOI: 10.1002/cpa.3160130303

5. Hayes W. D. Self-similar strong shocks in an exponential medium. *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 32. Iss. 2, pp. 305–315. DOI: 10.1017/S002211206800073X
6. Chernousko F. L. Skhodyashchiesya udarnye volny v gaze peremennoy plotnosti [Converging shock waves in a gas of variable density]. *PMM*. 1960. Vol. 24. No. 5, pp. 885–896. (In Russian)
7. Zeldovich Ya. B., Raizer Yu. P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. Moscow: Nauka, 1966, 688 p. (In Russian)
8. Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley & Sons, 1974, 635 p.
9. Ovsyannikov L. V. Priblizhennyj metod perescheta zakona rasprostraneniya udarnykh voln [An approximate method for recalculating the law of shock wave propagation]. *PMTF*. 1972. No. 1, pp. 55–57. (In Russian)
10. Kochin N. E. K teorii razryvov v zhidkosti. T. 2 [On the theory of discontinuities in fluids. Vol. 2]. Moscow – Leningrad: USSR Academy of Sciences, 1949. (In Russian)
11. Levin V. A., Laskovyy M. V. Rasprostranenie vzryvnykh voln v neodnorodnoj srede [Propagation of blast waves in an inhomogeneous medium]. 1989. No. 3776, 70 p. (In Russian)
12. Bogdanov A. N. Dinamika udarnykh voln v sredakh s prodol'noy stratifikatsiey [Dynamics of shock waves in media with longitudinal stratification]. *RAS Papers*. 2020. Vol. 65. No. 3, pp. 83–84. (In Russian). DOI: 10.31857/S2686740020020066
13. Chernyy G. G. Teheniya gaza s bol'shoj sverhzvukovoj skorost'yu [Gas flows at high supersonic speeds]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 220 p. (In Russian)
14. Landau L. D., Lifshits E. M. Teoreticheskaya fizika. T. 6: Gidrodinamika [Theoretical Physics. Vol. 6: Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1986, 736 p. (In Russian)
15. Olver F. Vvedenie v asimptoticheskie metody i special'nye funktsii [Introduction to asymptotic methods and special functions]. Moscow: Nauka, 1978, 376 p. (In Russian)

Date of receipt: September 1, 2023

Publication decision: September 7, 2023

Contact information:

Andrey N. BOGDANOV – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher (Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation, 119192, Moscow, Michurinsky pr., 1; Bauman Moscow State Technical University, Russian Federation, 105005, Moscow, Vtoraya Baumanskaya ul., 5/1), bogdanov@imec.msu.ru